Дифференцирование и интегрирование функций в комплексной степени

В.А. Жмудь

АО «Новосибирский институт программных систем», Россия
Институт лазерной физики СО РАН, Россия
Алтае-Саянский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Геофизической службы РАН

Аннотация. Некоторые математические задачи достигают такой сложности, что их решение и инженерная интерпретация уже невозможны, или, по меньшей мере, чрезвычайно затруднены для исследователей без применения средств искусственного интеллекта. Математические соотношения для таких задач весьма трудно интерпретировать. В связи с развитием средств для математических вычислений подобные проблемы частично утратили свою актуальность. Однако, в математике могут быть поставлены новые задачи, для которых существующие средства математических вычислений, возможно, ещё недостаточны. Предположительно, к таким задачам относится задача дифференцирования и интегрирования в комплексной степени. Дифференцирование различных функций широко применяется во многих отраслях математики, техники, науки. Исторически дифференцирование было известно для случаев, когда показатель степени дифференцирования был целым положительным числом, что означало кратность взятия операции дифференцирования. Позднее эта операция была расширена понятием того, что показатель степени может быть и отрицательным, что означает кратное интегрирование. Дифференцирование в отрицательной степени определено как интегрирование, а интегрирование в отрицательной степени как дифференцирование. Впоследствии был поставлен и положительно решен вопрос о возможности нецелого дифференцирования, и, соответственно, интегрирования. Это расширение математического аппарата оказалось весьма полезным, поскольку оно позволяет разрабатывать и реализовывать более эффективные регуляторы, например, для систем с отрицательной обратной связью. Публикации о взятии производной в чисто мнимой степени уже появлялись, но, по-видимому, в литературе обсуждался также и вопрос о дифференцировании, при котором степень взятия производной выражалась бы комплексным числом. Статья предлагает подход к решению этой задачи, который, возможно, ещё не обсуждался. Если этого комплексное число, обозначающее степень дифференцирования, имеет положительную действительную часть, операцию лучше называть именно особой формой дифференцирования, если же действительная часть показателя степени дифференцирования отрицательная, то операция больше соответствует понятию интегрирования. Формально инвертирование показателя степени дифференцирования превращает операцию в интегрирование и обратно. На протяжении всей истории неоднократно подтверждалось, что математика время от времени решает задачи, которые на момент их открытия не имеют очевидной прикладной ценности; однако разработка теории ценна сама по себе, даже если в настоящее время нет очевидной прикладной ценности такой разработки. Кроме того, опыт показывает, что каждый новый математический инструмент в конечном итоге будет применяться для решения важной практической задачи.

Ключевые слова: искусственный интеллект, автоматика, нецелое дифференцирование, нецелое интегрирование, преобразование Лапласа, комплексные числа

Введение

Дифференцирование сигналов широко применяется в системах автоматического управления. Дифференцирование является одним из наиболее распространенных видов обработки сигналов наряду с интегрированием и фильтрацией. Фильтрацию также можно представить как одну из форм линейного преобразования, основанного на дифференцировании или интегрировании, а также на алгебраическом суммировании сигналов или их различных фрагментов. Операции линейного преобразования сигналов имеют то выгодное отличие от операций нелинейных преобразований, что при их выполнении, как правило, отношение сигнал/шум, как минимум, почти не ухудшается, тогда как при выполнении операций нелинейного преобразования этот показатель может ухудшаться резко и безвозвратно. Если операция фильтрации при этом подавляет те области частот, где сигнал слаб или его появление вообще не должно происходить, оставляя без подавления или даже усиливая те области частот, которые представляют наибольший интерес, поскольку в них ожидается появление сигнала, то в результате отношение сигнал/шум во всей полосе полученного сигнала даже повышается, если оценивать его по признакам энергии сигнала во всей оставшейся полосе частот. Некоторые студенты порой даже характеризуют это действие как повышение отношения сигнал/шум, хотя на самом деле правильнее утверждать, что такая фильтрация просто подавляет шумы в тех частотных диапазонах, где полезной части сигнала нет, или где она не требуется для дальнейшей обработки всего сигнала в совокупности. Дифференцирование, интегрирование и фильтрация также широко применяются при обработке сигналов для идентификации объектов управления, то есть с целью определения математических моделей управляемых объектов. Также для целей управления потребовалось модифицировать понятие дифференцирования, расширив его до таких понятий, как нецелое дифференцирование и интегрирование. Это расширение оказалось весьма полезным. Данная статья рассматривает дальнейшие возможности расширения понятия дифференцирования.

Некоторые математические задачи достигают такой сложности, что их решение и инженерная интерпретация уже невозможны, или, по меньшей мере, чрезвычайно затруднены для исследователей без применения средств искусственного интеллекта. Математические соотношения для таких задач весьма трудно интерпретировать. В связи с развитием средств для математических вычислений подобные проблемы частично утратили свою актуальность. Однако, в математике могут быть поставлены новые задачи, для которых существующие средства математических вычислений, возможно, ещё недостаточны. Предположительно, к таким задачам относится задача дифференцирования и интегрирования в комплексной степени.

Дифференциальное исчисление стало одним из важнейших математических аппаратов во многих областях науки и техники. Изначально для операции дифференцирование было дано определение для простого дифференцирования, то есть дифференцирования в первой степени. Далее по индукции было дано понятие для любого целого порядка дифференцирования как суперпозиции соответствующего числа операций простого дифференцирования. Обратная операция, называемая интегрированием, может быть рассмотрена как дифференцирование в отрицательной степени. Таким образом, показатель степени дифференцирования был определен целым положительным числом, что означало кратность взятия операции дифференцирования. По мере развития математики, позднее эта операция расширилась принятием того предположения, что показатель степени может быть и отрицательным. Это означает кратное интегрирование. Дифференцирование в отрицательной степени определено как интегрирование, а интегрирование в отрицательной степени может быть определено как дифференцирование. Впоследствии математики поставили и положительно решили вопрос о возможности нецелого дифференцирования, и, соответственно, интегрирования [1–7]. Оказалось, что это расширение математического аппарата имеет достаточно важное прикладное значение. Например, это позволяет делать более точные модели из вязкоупругих материалов для больших растяжек [8]. Также такое нецелое дифференцирование позволяет проектировать и реализовывать более эффективные регуляторы для систем с отрицательной обратной связью [9–12]. Регуляторы с использованием нецелого дифференцирования и интегрирования получили специальное название – $PI^{\lambda}D^{\mu}$-регуляторы [13–16]. Здесь *P*, *I*, *D* означают, соответственно, пропорциональный, интегрирующий и дифференцирующий тракты, а показатели степени λ и μ являются нецелыми числами, значение которых превышает ноль, но меньше единицы [17–20]. Публикации на эту тему не прекращаются, их количество с каждым годом нарастает [21–25].

Публикации о взятии производной в чисто мнимой степени уже появились [25–27], нельзя исключать, что вопрос о дифференцировании, при котором степень взятия производной выражалась бы комплексным числом, в литературе также уже обсуждался, на это имеются указания [28–31]. Разумеется, если математики решили вопрос о дифференцировании в мнимой степени, то по достаточно понятным правилам можно утверждать, что дифференцирование в комплексной степени может быть выведено как следствие из понятий дифференцирования в мнимой степени и дифференцирования в действительной степени (причем, оба эти индекса дифференцирования могут быть нецелыми). В данной статье мы предлагаем другой способ решения этой задачи, при этом мы не беремся обсуждать, какой из методов более простой, мы даже не можем проверить, совпадут ли результаты применения двух разных методов. Исторически многократно подтверждалось, что математика очень часто решает такие задачи, которые на момент отыскания этих решений не имеют очевидной прикладной ценности, однако, развитие теории само по себе ценно даже при отсутствии на данный момент прикладного значения для такого развития. Кроме того, практика доказала, что всякий новый математический аппарат со временем находит свое приложение для какой-то важной практической задачи. Данная статья впервые ставит вопрос о том, как следует трактовать дифференцирование в мнимой степени. Из решения этого вопроса следует трактовка взятия операции дифференцирования в комплексной степени, а если действительная часть этого комплексного числа, используемого для указания степени, отрицательна, то указанная операция может трактоваться как интегрирование в комплексной степени, при этом при переходе от дифференцирования к интегрированию для указания степени интегрирования следует использовать комплексно-сопряженное число по отношению к исходному показателю степени дифференцирования.

Постановка задачи

Будем рассуждать о функциях времени, поскольку операции с функциями времени наиболее важны в теории сигналов.

Пусть имеется функция времени

$$f(t)\ . \qquad (1)$$

Для этой функции может быть введено понятие производной

$$\Upsilon(t) = f'(t) = df(t)/dt\ . \qquad (2)$$

Эта производная трактуется как скорость изменения функции, она определена через предел:

$$\Upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}\right)\ . \qquad (3)$$

Оператор дифференцирования можно обозначить в виде соответствующего символа

$$p = d/dt\ . \qquad (4)$$

Некоторые авторы утверждают, что с этим символом нельзя поступать, как с обычным алгебраическим множителем, но использовать его в таком виде допускается, то есть соотношение (2) можно переписать в следующем виде:

$$\Upsilon(t) = pf(t)\ . \qquad (5)$$

Применяя данный символ, можно условно записать также и интегрирование, которое определено следующим образом:

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\ . \qquad (6)$$

Упрощенная запись операции интегрирования в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\theta(t) = p^{-1}f(t)\ . \qquad (7)$$

В этот ряд также можно включить и ноль, т.е. отсутствие дифференцирования. А именно:

$$f(t) = p^{0}f(t)\ . \qquad (8)$$

Двойное дифференцирование – это взятие производной дважды

$$\Upsilon'(t) = f''(t) = d\left(\frac{df(t)}{dt}\right)/dt\ . \qquad (9)$$

Для такой операции существует специальное обозначение

$$\Upsilon'(t) = d^{2}f(t)/dt^{2}\ . \qquad (10)$$

Это отношение можно переписать в следующем виде:

$$\Upsilon'(t) = p^{2}f(t)\ . \qquad (11)$$

Здесь используется действие с символическим оператором дифференцирования (4), что можно записать также и в следующем виде:

$$\Upsilon'(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{2} f(t)\ . \qquad (12)$$

Аналогичным образом можно определить и двойное интегрирование

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \theta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]d\sigma\ . \qquad (13)$$

Указанное громоздкое соотношение (13) в символьном виде можно записать достаточно просто:

$$\Psi(t) = p^{-2}f(t)\ . \qquad (14)$$

На этом основании можно определить взятие производной любое целое количество раз:

$$p^{n}f(t) = \frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}\ . \qquad (15)$$

С учетом определения для отрицательной и нулевой степени дифференцирования в соотношении (15) показатель степени n может принимать любое конечное целое значение, включая отрицательные значения и ноль.

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty\ . \qquad (16)$$

Иными словами, показатель степени принадлежит к множеству целых чисел:

$$n \in Z. \qquad (17)$$

Здесь Z – множество целых чисел.

Обратим внимание на существенное отличие понятия n-кратного дифференцирования от возведения результата дифференцирования в степень n.

$$p^{n}f(t) \neq [pf(t)]^{n}\ . \qquad (18)$$

Таким образом, постановка задачи разбивается на две подзадачи.

Задача. Следует дать определение математической операции взятия производной степени $c = a + bi$, где i – мнимая единица, c – комплексное число, a, b – действительные коэффициенты.

Метод решения поставленной задачи

Метод решения поставленной задачи состоит в использовании преобразования Лапласа, которое позволило дать математически точное определение понятию нецелое дифференцирование и нецелое интегрирование.

Глубокое обоснование замены символа производной на буквенное обозначение с последующими действиями с этим обозначением по правилам алгебры имеется в математическом аппарате преобразования Лапласа. Действительно, в случае применения преобразования Лапласа к некоторой функции, получаем отображение по Лапласу от этой функции:

$$L\{f(t)\} \leftrightarrow F(s)\ . \qquad (19)$$

Здесь $L\{\cdot\}$ – преобразование Лапласа, s – аргумент функции Лапласа, $F(s)$ –

преобразование (образ) от функции $f(t)$ по Лапласу [32–35].

Преобразование Лапласа определено следующим образом:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \,. \quad (20)$$

Для этого преобразования известно, что если вместо исходной функции $f(t)$ использовать её производную $\Upsilon(t)$, то результат преобразования будет равен результату преобразования от исходной функции, умноженный на аргумент s:

$$L\{\Upsilon(t)\} = s \cdot L\{f(t)\}. \quad (21)$$

Аналогичное правило имеется для интеграла: если вместо исходной функции $f(t)$ использовать её интеграл $\Psi(t)$, то результат преобразования будет равен результату преобразования от исходной функции, деленный на аргумент s:

$$L\{\Psi(t)\} = \frac{1}{s} \cdot L\{f(t)\}. \quad (22)$$

Эти соотношения не только аналогичны соответствующим соотношениям с символьной записью операции дифференцирования, они также дают способ для понимания того, как может быть вычислен результат дробного дифференцирования или дробного интегрирования. А это, в свою очередь, легализует данную операцию, поскольку она может быть однозначно определена математически точно.

Действительно, например, половинное дифференцирование – это такое действие с функцией $f(t)$, которое даст новую функцию, результат преобразования по Лапласу от которой даст произведение преобразования от исходной функции на аргумент Лапласа в степени одна вторая:

$$L\left\{\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f(t)\right\} = s^{1/2} \cdot L\{f(t)\}. \quad (23)$$

Тем самым можно определить, что означает взятие операции дифференцирования или интегрирования в любой рациональной степени, т.е. показатель степени, который, согласно соотношению (17), мы отнесли к множеству целых чисел, мы теперь можем отнести к множеству действительных чисел R, а именно:

$$L\left\{\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right\} = s^m \cdot L\{f(t)\}. \quad (24)$$

$$n \in R. \quad (25)$$

Нецелое дифференцирование и интегрирование широко известно, оно используется, например, при проектировании регулятора.

В связи с поставленной задачей целесообразно использовать аппарат преобразования Лапласа для определения понятия мнимого дифференцирования, т.е. дифференцирования в мнимой степени, согласно Задаче 1.

Результат решения поставленной задачи

В данной статье поставлена цель решить фундаментальный математический вопрос: «допустимо ли применять в качестве показателей степени числа из множества комплексных чисел?» Промежуточный вопрос состоит в том, чтобы дать определение, как следует трактовать дифференцирование в мнимой степени.

На основании рассмотренной в предыдущем разделе методики мы можем записать

$$L\left\{\frac{d^i}{dt^i} f(t)\right\} = s^i \cdot L\{f(t)\}. \quad (26)$$

Следовательно, мы знаем, чему должно быть равно преобразование Лапласа от мнимого дифференцирования функции $f(t)$. Следовательно, мы можем определить мнимое дифференцирование как такое преобразование функции, которое после преобразования ее по Лапласу дает преобразование по Лапласу от исходной функции, умноженное на аргумент функции Лапласа в указанной мнимой степени. Это дает математическое соотношение для определения операции мнимого дифференцирования:

$$\frac{d^i}{dt^i} f(t) = L^{-1}\{s^i \cdot L\{f(t)\}\}. \quad (27)$$

Здесь $L^{-1}\{\cdot\}$ – обратное преобразование Лапласа, которое определено следующим образом:

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\sigma+i\omega}^{\sigma-i\omega} e^{-st} F(s) ds \,. \quad (28)$$

Поскольку операция преобразования Лапласа $L\{\cdot\}$ в (27) определена соотношением (20), также как операция обратного преобразования Лапласа $L^{-1}\{\cdot\}$ определена соотношением (28), тем самым операция (27) полностью определена, результат этой операции единственный.

Задача 2 может быть решена двумя путями. Во-первых, через определение вида (27) с заменой аргумента i на аргумент $c = a + bi$, во-вторых, можно перейти к требуемому соотношению через соотношения для вычисления комплексной степени комплексного числа через действительную и мнимую степени этого числа. Второй путь представляется более сложным, поэтому здесь не рассматривается.

Таким образом, производная комплексной степени от дифференцируемой функции может быть определена следующим образом:

$$\frac{d^c}{dt^c} f(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\sigma+i\omega}^{\sigma-i\omega} [e^{-st} s^c \times \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt] ds. \quad (27)$$

Обсуждение и перспективы применения результата

Постановка вопроса может на первый взгляд показаться не имеющей значения для теории, а полученный результат в виде соотношения (27) не демонстрирует явного практического значения на сегодняшний день. Однако поставленный нами теоретический вопрос имеет право на постановку, а предлагаемое решение этого вопроса с математической точки зрения несомненно, поскольку использованы несомненные исходные соотношения.

Публикации о производной в мнимой или даже, возможно, в комплексной степени уже появились. Глубокоуважаемые коллеги указывали нам на то, что подобные вопросы уже давно рассматривались и решены, в частности, со ссылкой на публикации [25–31]. Не все эти публикации имеются в открытом доступе, но, например, целый выпуск журнала Математика издательства МДПИ, посвященный нецелому дифференцированию, на который ссылались эти коллеги [26], изучен нами достаточно внимательно, ничего подобного дифференцированию в мнимой или тем более в комплексной степени в этом журнале нами не найдено. Можно лишь отметить, что даже нецелое дифференцирование, которому посвящен весь выпуск журнала, является очень сложной математической задачей, для решения которой предлагаются многие методы, как теоретические, так и численные, включая разнообразные методы аппроксимации. По-видимому, задача дифференцирования в комплексной степени не является столь простой, как на это указывают некоторые специалисты, и публикаций с решением этой задачи мы в открытом доступе не нашли. Может быть, не там искали, мы исходим из того, что такие публикации все-таки имеются, и возможно, они, в том числе, имеются в указанном нами перечне [25, 27–31].

Разумеется, если математики решили вопрос о дифференцировании в мнимой степени, то по достаточно понятным правилам можно утверждать, что дифференцирование в комплексной степени может быть выведено как следствие из понятий дифференцирования в мнимой степени и дифференцирования в действительной степени (причем, оба эти индекса дифференцирования могут быть нецелыми). В данной статье мы предлагаем другой способ решения этой задачи, при этом мы не беремся обсуждать, какой из методов более простой, мы даже не можем проверить, совпадут ли результаты применения двух разных методов. В некоторых случаях в математике используют определенные договоренности, как, например, было принято, что факториал от нуля равен единице, поскольку в этом случае многие формулы приобретают наиболее простой вид. Но могли бы договориться и до другого решения, сообщество математиков могло бы договориться о том, что факториал нуля равен нулю, поскольку по определению факториалом целого числа M называют произведение всех целых чисел от единицы до этого числа M, то есть число M должно входить в произведение, а если в произведение целых числе входит ноль, то результат равен нулю. Мы ни в коем случае не отрицаем, что факториал нуля равен единице, и не предлагаем отменить эту договорённость, мы лишь указываем на то, что даже в такой точной науке, как математика, может иметь место не только лишь точное доказательство одного следствия из другого, но и на некоторых этапах договорённость. Мы не нашли возможности сопоставить результаты двух методов вычисления производной в комплексной степени – известный и предлагаемый нами. Мы лишь предполагаем, что предлагаемый нами метод до настоящего времени не опубликован и не обсуждался. Вместе с тем мы убеждены, что предлагаемый нами метод должен быть правильным, поскольку он основан на правильных соотношениях, примененных должным образом. Было бы интересно узнать, что результаты не совпадут, и не менее интересно было бы убедиться, что результаты совпадут.

В соотношении (27) можно задавать различные конкретные виды функции $f(t)$, что позволит получать различные конкретные примеры мнимого и комплексного дифференцирования этих функций. Наиболее просто, по-видимому, будут вычислены такие операции по отношению к гармоническим, степенным и экспоненциальным функциям.

Взгляд на проблему с позиции теории автоматического управления

В теории автоматического управления также применяется нецелое дифференцирование и интегрирование, что отмечено выше и подтверждается уже приведенной библиографией [1 – 24].

Традиционное интегрирование возникает при рассмотрении, например, уравнения первого порядка, что является самым простейшим фильтром низких частот.

Самая обычная интегрирующая цепочка может быть описана, например, следующей передаточной функцией по Лапласу:

$$Y(s) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 s} X(s). \qquad (28)$$

Мы можем получить частотную характеристику этой системы, если заменим аргумент преобразования Лапласа s на комплексный аргумент преобразования Фурье, т.е. совершим следующую замену:

$$s \to i\omega. \qquad (29)$$

Передаточная функция, строго говоря, равна корню квадратному из квадратичной формы, т.е. мы должны сначала получить следующее соотношение

$$Y(i\omega) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 i\omega} X(i\omega). \quad (30)$$

Затем отношение выходной величины к входной величине следует умножить на комплексно-сопряженное число и из результата извлечь квадратный корень. Мы получим:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{a_0}{\sqrt{(b_0)^2 + (b_1\omega)^2}}. \quad (31)$$

Эта передаточная функция со всей очевидностью разбивается на пять разных диапазонов.

Во-первых, в случае

$$\omega \ll \frac{b_0}{b_1}, \quad (32)$$

то есть в случае, когда

$$b_0 \gg b_1\omega, \quad (33)$$

под корнем можно приблизительно оставить только второе слагаемое, которое легко выносится из-под корня. В этом случае можно приблизительно записать:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \approx \frac{a_0}{b_0}. \quad (34)$$

То есть в указанной области частот передаточная функция практически неизменна, при изменении частоты входного сигнала амплитуда выходного сигнала никак не изменяется. Этот участок можно назвать участком пропорционального пропускания входного сигнала.

Во-вторых, в случае

$$\omega \gg \frac{b_0}{b_1}, \quad (35)$$

то есть в случае, когда

$$b_0 \ll b_1\omega, \quad (36)$$

под корнем можно приблизительно оставить только второе слагаемое, которое легко выносится из-под корня. В этом случае можно приблизительно записать:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \approx \frac{a_0}{b_1\omega}. \quad (37)$$

То есть в указанной области частот передаточная функция затухает обратно пропорционально кратности увеличения частоты. Например, если частота на входе увеличится в четыре раза, то сигнал на выходе уменьшится также в четыре раза и так далее.

Этот участок можно назвать участком, на котором сигнал претерпевает интегрирование.

В-третьих, существует небольшая область частот, в которой

$$\omega \approx \frac{b_0}{b_1}, \quad (38)$$

то есть в случае, когда эти величины приблизительно соизмеримы

$$b_0 \approx b_1\omega. \quad (39)$$

В этом случае имеет место нечто среднее между предыдущими двумя случаями, то есть в указанной области частот передаточная функция затухает на величину, среднюю между двумя предыдущими вариантами, это приблизительно обратно пропорционально квадратного корня из кратности увеличения частоты. Например, если частота на входе увеличится в четыре раза, то сигнал на выходе уменьшится вдвое.

Этот участок можно назвать участком *половинного интегрирования*. Таким образом, половинное интегрирование – это не математические выдумки, а вполне реальное существующее на практике действие.

В-четвертых, имеется участок перехода из нулевого интегрирования в половинное.

В-пятых, существуют участок перехода из половинного перехода в целое.

Эти два участка дают все примеры промежуточных состояний нецелого интегрирования, но не в большой области частот, а в малых областях.

Кроме того, если построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику такого интегрирующего звена, то есть зависимость выходного сигнала от частоты при единичной амплитуде этого входного сигнала, то можно увидеть, что она распадается на указанные пять участков. Приближенно можно изобразить этот график только в виде отрезков, соответствующих первому и второму участкам, как показано линией 1 на *Рисунке* 1, а три остальных отличаются от этого приближенного графика не более чем на 3 дБ. Линия 2 на этом рисунке показывает график, если бы интегрирования не было. Линия 3 является средним алгебраическим между этими двумя линиями, она показывает график половинного интегрирования. Из этого факта можно сделать вывод, что половинное интегрирование приблизительно можно аппроксимировать функцией, составляющей среднее геометрическое между целым интегрированием и отсутствием интегрирования, однако, эта аппроксимация хорошо моделирует лишь зависимость амплитуды выходного сигнала, но она не является точной, а для фазовой характеристики зависимость более проста, поэтому не следует утверждать, что половинное интегрирование может быть получено как среднее геометрическое.

Таким образом, по крайней мере, для гармонических сигналов можно утверждать, что амплитуда от половины интеграла сигнала приблизительно равна среднему геометрическому от амплитуды исходного сигнала и амплитуды интеграла от этого сигнала:

$$\left|\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}X(t)\right|^2 \approx |X(t)|\cdot\left|\frac{d}{dt}X(t)\right|. \quad (40)$$

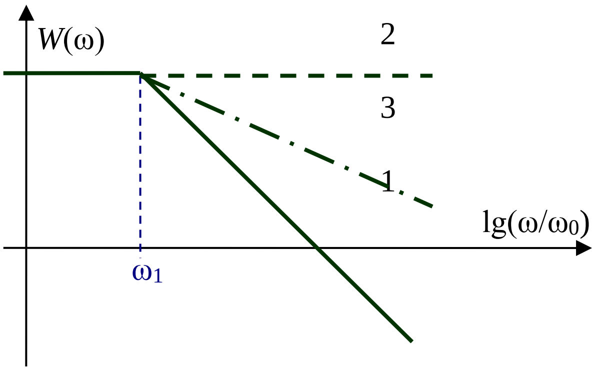

Рис. 1. Пример логарифмической амплитудно-частотной характеристики интегрирующего звена (реальный интегратор) -–линия 1, пропорционального звена – линия 2, и звена, осуществляющего реальное половинное интегрирование – линия 3

Аналогично можно показать, что фазовый сдвиг при половинном дифференцировании равен среднему арифметическому между фазовым сдвигом исходного сигнала и фазовым сдвигам полностью проинтегрированного сигнала. Так гармонический сигнал

$$X(t) = A(t)\cos(\omega t). \quad (41)$$

Можно представить как проекцию вращающегося вектора на ось абсцисс, при этом амплитуда этого вектора равна амплитуде сигнала (41), а угол поворота вектора равен фазе (41), что соответствует традиционному векторному представлению гармонических сигналов, то есть:

$$X(t) = A(t)\mathrm{e}^{i\omega t} = A(t)e^{i\varphi(t)}. \quad (42)$$

Интеграл от (41) имеет следующий вид:

$$Y(t) = \frac{1}{\omega}A(t)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = B(t)e^{i\theta(t)} \quad (43)$$

Здесь введены новые обозначения для новой амплитуды и новой фазы.

Иными словами, амплитуда уменьшается пропорционально частоте, а сдвиг фазы равен $\pi/2$. В случае половинного интегрирования амплитуда уменьшится в величину, равную корню из частоты, а сдвиг фазы будет вдвое меньшим:

$$Y_{0.5}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{\omega}}A(t)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (44)$$

В терминах соотношений (42), (43) можно записать:

$$Y_{0.5}(t) \approx \sqrt{A(t)B(t)}\mathrm{e}^{i[\theta(t)+\varphi(t)]/2}. \quad (45)$$

Данное соотношение не имеет существенного значения для математики, поскольку оно не является строго математическим определением понятия половинной производной, однако, оно может оказаться достаточно полезным для приближенных вычислений, а также, на наш взгляд, оно достаточно полезно для инженерного представления о том, что же такое половинная производная. Это соотношение можно критиковать также с той позиции, что операции интегрирования и дифференцирования – это линейные операции. В соответствии с этим операции нецелого интегрирования и дифференцирования также должны быть линейными операциями. По внешнему виду соотношение (45) никак не выглядит линейным.

Из практики автоматического управления известна аппроксимация половинного или вообще нецелого интегрирования в операторной области (в области преобразований Лапласа) следующим приближенным соотношением [24]:

$$Y_\lambda(s) = \frac{1}{s^\lambda} \approx K_I\frac{\prod_{i=0}^{N-1}\left(1+\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1}\left(1+\frac{s}{p_i}\right)}. \quad (46)$$

Здесь z_i и p_i – коэффициенты, симметрично возрастающие от наименьшего значения к наибольшему; например, $p_i = k\cdot p_i$, $z_i = k\cdot z_i$, $p_0 \neq z_0$ [24].

Это соотношения явно является линейным, но оно также явно является приближенным.

Поэтому следует подчеркнуть, что соотношение (27), приведенное выше, является наилучшим определением нецелого дифференцирования и с позиции точности, и с позиции определения понятия некратного интегрирования.

А нецелое интегрирование можно определить двумя способами.

Во-первых, его можно определить как результат целого интегрирования величины, полученной нецелым дифференцированием. Во-вторых, его можно определить как результат нецелого дифференцирования величины, полученной целым интегрированием. В-третьих, его можно определить по аналогии с соотношением (27), а именно:

$$Y_\lambda(t) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma+i\omega}^{\sigma-i\omega}\left[e^{-st}s^{-\lambda}\cdot\int_0^\infty e^{-st}X(t)dt\right]ds. \quad (47)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении нецелого дифференцирования соотношений (41) и (42). Производная от сигнала (41) имеет следующий вид:

$$Z(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \omega A(t)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (48)$$

Также введем обозначение

$$D(t) = \omega A(t). \quad (49)$$

$$\vartheta(t) = \varphi(t) + \frac{\pi}{2}. \quad (50)$$

В этих терминах соотношение (48) можно переписать в следующем виде:

$$Z(t) = \frac{dX(t)}{dt} = D(t)\cos(\vartheta(t)). \quad (51)$$

В векторном представлении получаем:

$$Z(t) = D(t)e^{i\vartheta(t)}. \quad (52)$$

Половинная производная в этом случае может быть представлена приблизительно следующим соотношением:

$$Z_{0.5}(t) \approx \sqrt{A(t)D(t)}e^{i[\vartheta(t)+\varphi(t)]/2}. \quad (53)$$

Приведенное соотношение (53) также не является строго математически обоснованным, оно интересно с инженерной точки зрения как один из вариантов понимания того, что такое половинное дифференцирование. Строгим определением является соотношение (27). Для иллюстрации технического дифференцирования, получаемого на дифференцирующей цепочки, а также отсутствия дифференцирования и половинного дифференцирования можно привести график аналогичной логарифмической амплитудно-частотной характеристики, подобный графику на *рисунке* 1. Этот график показан на *рисунке* 2.

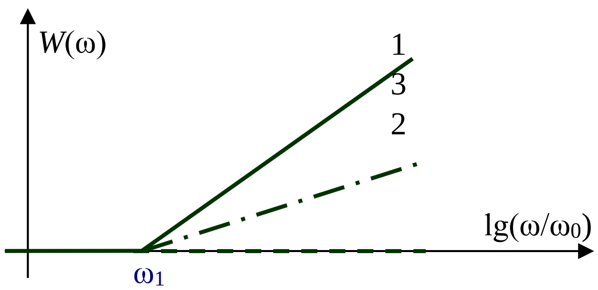

Рис. 2. Пример логарифмической амплитудно-частотной характеристики звена реального дифференцирования – линия 1, пропорционального звена – линия 2, и звена, осуществляющего реальное половинное дифференцирование – линия 3

Таким образом, в отношении нецелого дифференцирования и нецелого интегрирования имеется достаточно много различных концепций, которые не противоречат друг другу. Рассматриваемая выше концепция наиболее интуитивно понятна с позиции инженерного подхода, хотя не безупречна. Концепция, основанная на соотношении (46), наиболее удобна для реализации и для математического моделирования с применением таких, например, программных средств, как *MATLAB Simulink*, *VisSim*, *SimInTech* или иных подобных программных средств. Концепция, основанная на соотношении (27), на наш взгляд, является наилучшей со всех позиций, поскольку она одновременно и интуитивно понятна на инженерном уровне, и безупречна с математической точки зрения. Однако, мы в настоящее время затрудняемся назвать алгоритм, который бы позволял вычислять нецелую производную или нецелый интеграл от функции, которая поступает на вход цифрового устройства в режиме реального времени в виде отдельных отсчетов. Такой алгоритм безусловно может быть реализован на основании соотношения (46) или близкого к нему.

Целесообразность применения алгоритма по соотношениям (45) или (53) несущественна, поскольку простое выражение получается только для случая ровно половинного дифференцирования или половинного интегрирования, тогда как соотношение (46) позволяет задавать произвольный дробный показатель дифференцирования или интегрирования.

По-видимому, достаточно актуальной задачей для искусственного интеллекта было бы отыскание простых алгоритмов для вычисления нецелых производных и нецелых интегралов непосредственно по соотношениям (27) и (47).

В связи с этим не столь остро, но достаточно актуально стоит также задача вычисления и наглядной интерпретации производной в комплексной степени по соотношению (27) или интеграла в комплексной степени по соотношению (47).

Заключение

В данной статье рассмотрены новые задачи для средств искусственного интеллекта на примере дифференцирования и интегрирования в комплексной степени. Математическое определение для этих операций в форме (27) и (47) впервые введены через прямое и обратное преобразования Лапласа. Для практического применения этих соотношений и наглядной интерпретации этих операций с целью осмысления на инженерном уровне желательно использование средств искусственного интеллекта, превышающих возможности традиционных математических вычислительных пакетов. С позиции дальнейшего развития этого направления можно указать интересный подход в плане применения гиперкомплексных чисел. Как известно, гиперкомплексными числами называют особую формы комплексных чисел, где имеется в общем виде четыре слагаемых, одно из которых является действительной частью числа, а три других – мнимые компоненты. Достоверно известно, что гиперкомплексные числа могут успешно применяться для обработки сигналов [36], для решения задач управления многоканальными объектами [37] и для использования нечеткой логики [38]. Все это – незаменимый математический аппарат для эвристических методов, применяемых в искусственном интеллекте. Рассмотрение возможности дифференцирования и интегрирования в степени, которая выражается гиперкомплексным числом, позволит расширить инструментарий этого математического аппарата. Применение преобразований Лапласа в пространстве гиперкомплексных чисел должно иметь свое расширение, соответственно, простое использование соотношений (27) и (47), вероятно, не даст требуемого результата, однако, эти соотношения могут быть взяты за основу дальнейших рассуждений. Также предлагаемые математические соотношения могут оказаться полезными для методов нечеткой логики, методов генерации псевдослучайных чисел, для отыскания математических моделей тех физических объектов, для которых до настоящего времени адекватные модели не найдены вследствие сложности происходящих в них процессов, как, например, в квантовой электронике, в физике элементарных частиц [39]. Для случая слишком сложного вида функций $f(t)$ вычисление производной в комплексной степени может оказаться достаточно сложной математической задачей. В этом случае такую задачу можно использовать в качестве тестового задания для сравнения вычислительных мощностей различных многоядерных процессоров, что также может оказаться в достаточной степени актуальным.

Литература

[1] Podlubny, I. Fractional Order Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers. IEEE Trans. Autom. Control 1999, 44, 208–214. [CrossRef]

[2] Maamri, N.; Trigeassou, J. C. Integration of Fractional Differential Equations without Fractional Derivatives," 2021 9th International Conference on Systems and Control (ICSC), 2021, pp. 429-435, doi: 10.1109/ICSC50472.2021.9666533.

[3] Mbodje, B.; Montseny, G.; Boundary fractional derivative control of the wave equation, in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 2, pp. 378-382, Feb. 1995, doi: 10.1109/9.341815.

[4] Trigeassou, J.; Maamri N.; Oustaloup, A. Automatic initialization of the Caputo fractional derivative, 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011, pp. 3362-3368, doi: 10.1109/CDC.2011.6160624.

[5] Paola, M. Di; Pinnola F. P.; Spanos P. D. Analysis of multi-degree-of-freedom systems with fractional derivative elements of rational order, ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014, 2014, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICFDA.2014.6967364.

[6] Ionescu C. M.; Ionescu F. D. Power law and fractional derivative models can measure analgesia, 2014 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics, 2014, pp. 1-4, doi: 10.1109/AQTR.2014.6857908.

[7] Wei, X.; Liu D.; Boutat D. Caputo fractional derivative estimation for a class of signals satisfying a linear differential equation, 2015 34th Chinese Control Conference (CCC), 2015, pp. 4598-4603, doi: 10.1109/ChiCC.2015.7260350.

[8] Fukunaga, M.; Shimizu, N. Fractional derivative models of viscoelastic materials for large extension, ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014, 2014, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICFDA.2014.6967439.

[9] Leu, J.F.; Tsay, S.Y.; Hwang, C. Design of Optimal Fractional Order PID Controllers. J. Chin. Inst. Chem. Eng. 2002, 33, 175–179.

[10] Stanisławski, R.; Rydel, M.; Li, Z. A New Reduced-Order Implementation of Discrete-Time Fractional-Order PID Controller. IEEE Access 2022, 10, 17417–17429. [CrossRef]

[11] Zhmud, V.; Dimitrov, L.; Nosek, J. Automatic Control Systems. New Concepts and Structures of Regulators; RuScience: Moscow, Russia, 2018; p. 84.

[12] Shekher, V.; Rai, P.; Prakash, O. Tuning and Analysis of Fractional Order PID Controller. Int. J. Electron. Electr. Eng. 2012, 5, 11–21.

[13] Dumlu, A.; Ayten, K. Real time fractional-order control technique for coupled tank liquid level control process. Int. J. Adv. Appl. Sci. 2017, 4, 127–132. [CrossRef]

[14] Dorcak, L.; Terpak, J.; Papajova, M.; Dorcakova, F.; Pivka, L. Design of the fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers based on the optimization with self-organizing migrating algorithm. Acta Montan. Slovaca 2007, 12, 285–293.

[15] Abraham, A.; Biswas, A.; Das, S.; Dasgupta, S. Design of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers with an Improved Differential Evolution. Available online: http://www.softcomputing.net/gecco2008_abraham.pdf (accessed on 21 January 2022).

[16] Das, S.; Pan, I.; Gupta, A. Improved Model Reduction and Tuning of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers for Analytical Rule Extraction with Genetic Programming. ISA Trans. 2012, 51, 237–261. [CrossRef] [PubMed]

[17] Bettoua, K.; Charef, A. Control quality enhancement using fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller. Int. J. Syst. Sci. 2009, 40, 875–888. [CrossRef]

[18] El-Khazali, R. Fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller design. Comput. Math. Appl. 2013, 66, 639–646. [CrossRef]

[19] Ranganayakulu, R.; Uday, B.B.; Rao, A.; Patle, D. A comparative study of fractional order $PI^{\lambda}/PI^{\lambda}D^{\mu}$ tuning rules for stable first order plus time delay processes. Resour. Effic. Technol. 2016, 2, 136–152. [CrossRef]

[20] Pan, Z.; Wang, X.; Hoang, T.; Chen, Y.; Tian, L. Design and Application of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller in Grid-Connected Inverter System. In Proceedings of the ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Cleveland, OH, USA, 6–9 August 2017.

[21] Puangdownreong, D. Optimal $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller Design Based on Spiritual Search for Wind Turbine Systems. Int. J. Innov. Comput. Inf. Control 2019, 15, 2259–2273.

[22] Tytiuk, V.; Chornyi, O.; Baranovskaya, M.; Serhiienko, S.; Zachepa, I.; Tsvirkun, L.; Kuznetsov, V.; Tryputen, N. Synthesis of a Fractional-Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$-controller for a Closed System of Switched Reluctance Motor Control. Ind. Control Syst. 2019, 2, 35–42. [CrossRef]

[23] Mohammed, R. Quadrotor Control Using Fractional-Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Control. JACET 2019, 5, 1–10.

[24] Zhmud, V.; Dimitrov, L. Using the Fractional Differential Equation for the Control of Objects with Delay. Symmetry 2022, 14, 635. https://doi.org/10.3390/sym14040635

[25] Kilbas, A. A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, Vol.204,

Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York, 2006. https://www.elsevier.com/books/theory-and-applications-of-fractional-differential-equations/kilbas/978-0-444-51832-3

[26] Fractional Calculus: Theory and Applications. Edited by F. Mainardi. https://www.mdpi.com/books/pdfdownload/book/755

[27] Ross, B. (Ed.). The fractional calculus and its application, in: Lecture notes in mathematics, vol.475, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[28] Baleanu, D., Machado, J.A.T., Luo, A.C.J. Fractional Dynamics and Control, Springer Science, 2012. http://rentals.springer.com/product/9781461404576

[29] Bertram Ross, Francis H. Northover, A use for a derivative of complex order in the fractional calculus, 9(4),(1977), 400-406;

[30] Bai, Z., Lu, H. Positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 495-505. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X05001733

[31] Neamaty, A., Yadollahzadeh, M., Darzi, R. On fractional differential equation with complex order. Progr. Fract. Differ. Appl 1.3 (2015): 223-227. https://www.naturalspublishing.com/files/published/173ze8c3p6e39t.pdf

[32] Wang, Y.; Chen, G. Formalization of Laplace Transform in Coq, 2017 International Conference on Dependable Systems and Their Applications (DSA), 2017, pp. 13-21, doi: 10.1109/DSA.2017.12.

[33] Erfani, S.; Ahmadi, M. Fundamentals of generalized Laplace transform techniques for linear time-varying systems, ISSCS 2011 - International Symposium on Signals, Circuits and Systems, 2011, pp. 1-4, doi: 10.1109/ISSCS.2011.5978707.

[34] Adams, J. L.; Veillette, R. J.; Hartley T. T.; Adams, L. I. Restrictions on the inverse Laplace transform for fractional-order systems," ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014, 2014, pp. 1-8, doi: 10.1109/ICFDA.2014.6967367.

[35] Fulton, D. Explaining complex power, in *IEEE Power Engineering Review*, vol. 19, no. 6, pp. 47-, June 1999, doi: 10.1109/39.768516.

[36] H. D. Schutte and J. Wenzel, "Hypercomplex numbers in digital signal processing," *1990 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 1990, pp. 1557-1560 vol.2, doi: 10.1109/ISCAS.1990.112431.

[37] D. Schulz, J. Seitz and J. P. C. L. da Costa, "Widely linear SIMO filtering for hypercomplex numbers," *2011 IEEE Information Theory Workshop*, 2011, pp. 390-395, doi: 10.1109/ITW.2011.6089486.

[38] R. A. Watanabe, E. Esmi Laureano and C. C. Trinca Watanabe, "Fuzzy Octonion Numbers and Fuzzy Hypercomplex Numbers," *2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, 2019, pp. 1-6, doi: 10.1109/FUZZ-IEEE.2019.8858970.

[39] В.А. Жмудь. Связь уравнений Томаса-Ферми и Риккати. Автоматика и программная инженерия. 2014. 4(10). С. 81–84. http://jurnal.nips.ru/sites/default/files/%D0%90%D0%98%D0%9F%D0%98-4-2014-10.pdf

Вадим Жмудь – заместитель директора АО «НИПС», доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник ИЛФ СО РАН, старший научный сотрудник Алтае-Саянского филиала ФГБУН Геофизической службы РАН.

E-mail: oao_nips@bk.ru

630090, Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, д. 6/1

Статья поступила 07.07.2022.

Derivation and Integration of Functions in a Complex Degree

V.A. Zhmud
Novosibirsk Institute of Program Systems, Russia
Institute of Laser Physics SB RAS, Russia
Altae-Sayan Branch of the Federal State Budgetary Institution of Science of the Geophysical Service of the RAS

Abstract: Some mathematical problems reach such complexity that their solution and engineering interpretation is no longer possible, or at least extremely difficult for researchers without the use of artificial intelligence tools. Mathematical relations for such problems are very difficult to interpret. In connection with the development of means for mathematical calculations, such problems have partially lost their relevance. However, new problems can be posed in mathematics, for which the existing means of mathematical calculations may still be insufficient. Presumably, such problems include the problem of differentiation and integration to a complex degree. Differentiation of various functions is widely used in many branches of mathematics, technology, and science. Historically, differentiation was known for cases where the exponent of the degree of differentiation was a positive integer, which meant the multiplicity of taking the differentiation operation. Later, this operation was extended with the notion that the exponent can also be negative, which means multiple integration. Differentiation to a negative power is defined as integration, and integration to a negative power is defined as differentiation. Subsequently, the question of the possibility of non-integer differentiation and, accordingly, integration was raised and positively resolved. This extension of the mathematical apparatus proved to be very useful, since it allows the design and implementation of more efficient controllers, for example, for systems with negative feedback. Publications about taking the derivative to a purely imaginary degree have already appeared, but, apparently, the question of differentiation was also discussed in the literature, in which the degree of taking the derivative would be expressed by a complex number. The article proposes an approach to solving this problem, which may not have been discussed yet. If this complex number, denoting the degree of differentiation, has a positive real part,

the operation is better called a special form of differentiation, but if the real part of the degree of differentiation is negative, then the operation is more consistent with the concept of integration. Formally, inverting the exponent of the degree of differentiation turns the operation into integration and vice versa. Throughout history, it has been repeatedly confirmed that mathematics, from time to time, solves problems that, at the time of their discovery, have no obvious applied value; however, the development of a theory is valuable in itself, even if there is currently no obvious applied value of such development. In addition, experience shows that each new mathematical tool will eventually be used to solve an important practical problem.

Key words: artificial intelligence, automation, non-integer differentiation, non-integer integration, Laplace transform, complex numbers.

References

[1] Podlubny, I. Fractional Order Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers. IEEE Trans. Autom. Control 1999, 44, 208–214. [CrossRef]

[2] Maamri, N.; Trigeassou, J. C. Integration of Fractional Differential Equations without Fractional Derivatives," 2021 9th International Conference on Systems and Control (ICSC), 2021, pp. 429-435, doi: 10.1109/ICSC50472.2021.9666533.

[3] Mbodje, B.; Montseny, G.; Boundary fractional derivative control of the wave equation, in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 2, pp. 378-382, Feb. 1995, doi: 10.1109/9.341815.

[4] Trigeassou, J.; Maamri N.; Oustaloup, A. Automatic initialization of the Caputo fractional derivative, 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011, pp. 3362-3368, doi: 10.1109/CDC.2011.6160624.

[5] Paola, M. Di; Pinnola F. P.; Spanos P. D. Analysis of multi-degree-of-freedom systems with fractional derivative elements of rational order, ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014, 2014, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICFDA.2014.6967364.

[6] Ionescu C. M.; Ionescu F. D. Power law and fractional derivative models can measure analgesia, 2014 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics, 2014, pp. 1-4, doi: 10.1109/AQTR.2014.6857908.

[7] Wei, X.; Liu D.; Boutat D. Caputo fractional derivative estimation for a class of signals satisfying a linear differential equation, 2015 34th Chinese Control Conference (CCC), 2015, pp. 4598-4603, doi: 10.1109/ChiCC.2015.7260350.

[8] Fukunaga, M.; Shimizu, N. Fractional derivative models of viscoelastic materials for large extension, ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014, 2014, pp. 1-5, doi: 10.1109/ICFDA.2014.6967439.

[9] Leu, J.F.; Tsay, S.Y.; Hwang, C. Design of Optimal Fractional Order PID Controllers. J. Chin. Inst. Chem. Eng. 2002, 33, 175–179.

[10] Stanisławski, R.; Rydel, M.; Li, Z. A New Reduced-Order Implementation of Discrete-Time Fractional-Order PID Controller. IEEE Access 2022, 10, 17417–17429. [CrossRef]

[11] Zhmud, V.; Dimitrov, L.; Nosek, J. Automatic Control Systems. New Concepts and Structures of Regulators; RuScience: Moscow, Russia, 2018; p. 84.

[12] Shekher, V.; Rai, P.; Prakash, O. Tuning and Analysis of Fractional Order PID Controller. Int. J. Electron. Electr. Eng. 2012, 5, 11–21.

[13] Dumlu, A.; Ayten, K. Real time fractional-order control technique for coupled tank liquid level control process. Int. J. Adv. Appl. Sci. 2017, 4, 127–132. [CrossRef]

[14] Dorcak, L.; Terpak, J.; Papajova, M.; Dorcakova, F.; Pivka, L. Design of the fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers based on the optimization with self-organizing migrating algorithm. Acta Montan. Slovaca 2007, 12, 285–293.

[15] Abraham, A.; Biswas, A.; Das, S.; Dasgupta, S. Design of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers with an Improved Differential Evolution. Available online: http://www.softcomputing.net/gecco2008_abraham.pdf (accessed on 21 January 2022).

[16] Das, S.; Pan, I.; Gupta, A. Improved Model Reduction and Tuning of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controllers for Analytical Rule Extraction with Genetic Programming. ISA Trans. 2012, 51, 237–261. [CrossRef] [PubMed]

[17] Bettoua, K.; Charef, A. Control quality enhancement using fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller. Int. J. Syst. Sci. 2009, 40, 875–888. [CrossRef]

[18] El-Khazali, R. Fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller design. Comput. Math. Appl. 2013, 66, 639–646. [CrossRef]

[19] Ranganayakulu, R.; Uday, B.B.; Rao, A.; Patle, D. A comparative study of fractional order $PI^{\lambda}/PI^{\lambda}D^{\mu}$ tuning rules for stable first order plus time delay processes. Resour. Effic. Technol. 2016, 2, 136–152. [CrossRef]

[20] Pan, Z.; Wang, X.; Hoang, T.; Chen, Y.; Tian, L. Design and Application of Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller in Grid-Connected Inverter System. In Proceedings of the ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Cleveland, OH, USA, 6–9 August 2017.

[21] Puangdownreong, D. Optimal $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller Design Based on Spiritual Search for Wind Turbine Systems. Int. J. Innov. Comput. Inf. Control 2019, 15, 2259–2273.

[22] Tytiuk, V.; Chornyi, O.; Baranovskaya, M.; Serhiienko, S.; Zachepa, I.; Tsvirkun, L.; Kuznetsov, V.; Tryputen, N. Synthesis of a Fractional-Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$-controller for a Closed System of Switched Reluctance Motor Control. Ind. Control Syst. 2019, 2, 35–42. [CrossRef]

[23] Mohammed, R. Quadrotor Control Using Fractional-Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Control. JACET 2019, 5, 1–10.

[24] Zhmud, V.; Dimitrov, L. Using the Fractional Differential Equation for the Control of Objects with Delay. Symmetry 2022, 14, 635. https://doi.org/10.3390/sym14040635

[25] Kilbas, A. A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, Vol.204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York, 2006. https://www.elsevier.com/books/theory-and-applications-of-fractional-differential-equations/kilbas/978-0-444-51832-3

[26] Fractional Calculus: Theory and Applications. Edited by F. Mainardi. https://www.mdpi.com/books/pdfdownload/book/755

[27] Ross, B. (Ed.). The fractional calculus and its application, in: Lecture notes in mathematics, vol.475, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[28] Baleanu, D., Machado, J.A.T., Luo, A.C.J. Fractional Dynamics and Control, Springer Science, 2012. http://rentals.springer.com/product/9781461404576

[29] Bertram Ross, Francis H. Northover, A use for a derivative of complex order in the fractional calculus, 9(4),(1977), 400-406;

[30] Bai, Z., Lu, H. Positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 495-505. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X05001733

[31] Neamaty, A., Yadollahzadeh, M., Darzi, R. On fractional differential equation with complex order. Progr. Fract. Differ. Appl 1.3 (2015): 223-227. https://www.naturalspublishing.com/files/published/173ze8c3p6e39t.pdf

[32] Wang, Y.; Chen, G. Formalization of Laplace Transform in Coq, 2017 International Conference on Dependable Systems and Their Applications (DSA), 2017, pp. 13-21, doi: 10.1109/DSA.2017.12.

[33] Erfani, S.; Ahmadi, M. Fundamentals of generalized Laplace transform techniques for linear time-varying systems, ISSCS 2011 - International Symposium on Signals, Circuits and Systems, 2011, pp. 1-4, doi: 10.1109/ISSCS.2011.5978707.

[34] Adams, J. L.; Veillette, R. J.; Hartley T. T.; Adams, L. I. Restrictions on the inverse Laplace transform for fractional-order systems," ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014, 2014, pp. 1-8, doi: 10.1109/ICFDA.2014.6967367.

[35] Fulton, D. Explaining complex power, in *IEEE Power Engineering Review*, vol. 19, no. 6, pp. 47-, June 1999, doi: 10.1109/39.768516.

[36] H. D. Schutte and J. Wenzel, "Hypercomplex numbers in digital signal processing," *1990 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 1990, pp. 1557-1560 vol.2, doi: 10.1109/ISCAS.1990.112431.

[37] D. Schulz, J. Seitz and J. P. C. L. da Costa, "Widely linear SIMO filtering for hypercomplex numbers," *2011 IEEE Information Theory Workshop*, 2011, pp. 390-395, doi: 10.1109/ITW.2011.6089486.

[38] R. A. Watanabe, E. Esmi Laureano and C. C. Trinca Watanabe, "Fuzzy Octonion Numbers and Fuzzy Hypercomplex Numbers," *2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, 2019, pp. 1-6, doi: 10.1109/FUZZ-IEEE.2019.8858970.

[39] В.А. Жмудь. Связь уравнений Томаса-Ферми и Риккати. Автоматика и программная инженерия. 2014. 4(10). С. 81–84. http://jurnal.nips.ru/sites/default/files/%D0%90%D0%98%D0%9F%D0%98-4-2014-10.pdf

Vadim Zhmud – Vice-Head of NIPS, Assistant Professor, Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher, ILP SB RAS, Senior Researcher, Altai-Sayan Branch, Geophysical Survey RAS.
E-mail: oao_nips@bk.ru

630073, Novosibirsk,
str. Prosp. Lavrientieva, h. 6/1

The paper has been received on 07/07/2022.